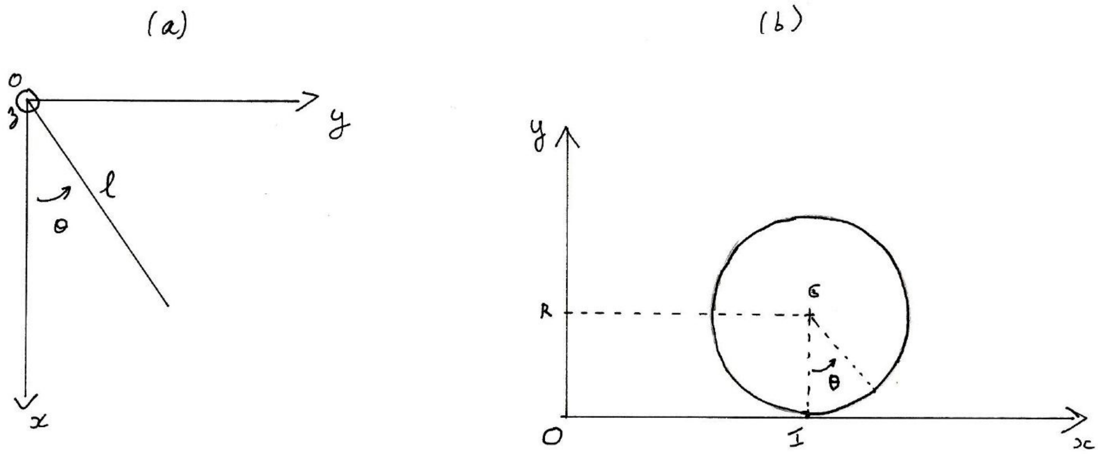
Contrôle Continu Session 1 - Durée : 1h

Les documents, téléphones portables et calculatrices sont interdits.
Ce partiel comporte deux exercices indépendants.
Les caractères gras désignent des vecteurs.



A.Le pendule

On considère une tige de masse m et de longueur ℓ. On néglige les dimensions transversales de la tige. On note λ la masse linéïque uniforme de la tige. La tige est articulée autour d'un point O fixe. Elle oscille dans un plan vertical autour de l'axe Oz (voir figure a). On note θ l'angle que fait la tige par rapport à l'axe Ox.

1 – Exprimer la masse m de la tige en fonction de la masse linéïque λ et de sa longueur ℓ.

2 – Calculer le moment d'inertie I_{Oz} de la tige par rapport à l'axe Oz.

3 – Exprimer le vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$ de la tige par rapport au référentiel fixe muni du repère $(Oxyz)$ en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et du vecteur unitaire $\mathbf{e}_z$ de l'axe Oz.

4 – Calculer par intégration directe le moment cinétique $\mathbf{L}$ en fonction de λ, $\dot{\theta}$ et ℓ, puis en fonction de m, ℓ et $\dot{\theta}$. Retrouver l'expression de I_{Oz}.

5 – Déterminer les coordonnées du centre de masse G dans $(Oxyz)$.

6 – En déduire les coordonnées du vecteur vitesse dans $(Oxyz)$.

7 – Calculer l'expression du moment d'inertie I_Δ de la tige par rapport à l'axe passant par G et parallèle à Oz en utilisant l'expression générale du moment d'inertie.

8 – Retrouver ce résultat grâce au théorème de Huygens.

9 – Calculer grâce au théorème de Kœnig l'expression du moment cinétique par rapport à G.

10 – En déduire l'expression de I_Δ.

B. Vitesse de glissement d'un disque

On considère un disque homogène de centre G, de masse m et de rayon R qui roule sans glisser sur la droite (Ox) (voir figure b). On repère l'angle d'un point du disque par θ. La coordonnée selon (Ox) de la vitesse du centre de masse G est notée $\mathbf{v}_G = \dot{x}\mathbf{e}_x$.

11 – On note σ la densité surfacique de masse du disque. Montrer que le moment d'inertie I_G du disque par rapport à G vaut $I_G = \pi\sigma R^4$. En déduire son expression en fonction de m et R.

12 – Exprimer le vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$ du disque par rapport au référentiel fixe muni du repère $(Oxyz)$ en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et du vecteur unitaire $\mathbf{e}_z$ de l'axe Oz.

13 – On note I le point de contact : soient I_1 le point du disque et I_2 celui de la droite (Ox). Que dire de la vitesse de I_2?

14 – En déduire la condition de vitesse sans glissement sur la vitesse de I_1.

15 – En rappelant l'expression fondamentale qui relie la vitesse entre deux points d'un solide, exprimer la condition de roulement sans glissement en fonction de $\dot{x}$, R et $\dot{\theta}$.

16 – Interpréter le signe dans cette expression.